Επεκτεταμένη Πραγματική ευθεία:

$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$

Υπάρχει διάταξη: $-\infty < x < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΤΟ $\pm\infty$.

$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$

$(\pm\infty) - (\pm\infty) = (\pm\infty) + (\mp\infty) =$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ

$\forall x \in \mathbb{R}$:

1) $x > 0$: $(\pm\infty)x = x(\pm\infty) = \pm\infty$
2) $x < 0$: $(\pm\infty)x = x(\pm\infty) = \mp\infty$
3) $x = 0$: $(\pm\infty)\cdot 0 = 0\cdot(\pm\infty) = 0$

Συμβολίζουμε με καλλιγραφικό μεγάλο δύο: το σύνολο $\{0,1\}$

Δηλαδή,

$$\mathcal{2} := \{0,1\}$$

Επίσης,

$$A^B := \{f : B \to A\}$$

Επομένως,

$$\mathcal{2}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$$

Θεωρούμε, $S_k := \sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$ τέτοια ώστε $S_k \geq S_{k+1}$ άρα φθίνουσα και μάλιστα είναι και φραγμένη $\underset{\text{στο } \overline{\mathbb{R}}}{}$. Άρα, $\lim_k S_k = \inf_k (S_k)$

Εντούτοις, $\lim_k S_k = \inf_k \sup\{x_\nu : \nu \geq k\} =$

$$= \lim_k \sup(x_\nu)$$

Το οποίο ονομάζεται ανώτερο όριο της ακολουθίας x_ν (limes superior)

Θεωρούμε τώρα $i_k := \inf\{x_\nu : \nu \geq k\}$ τέτοια ώστε $i_k \leq i_{k+1}$ άρα αύξουσα και μάλιστα φραγμένη στο $\tilde{\mathbb{R}}$. Άρα, $\sup_k S_k = \lim_k S_k = \lim_k \inf\{x_\nu : \nu \geq k\} =$

$$= \lim\inf(x_\nu)$$

Συμβολίζουμε επίσης:

$\overline{\lim}(x_\nu) = \lim\sup(x_\nu)$ και $\underline{\lim}(x_\nu) = \lim\inf(x_\nu)$

Τα οποία πάντα υπάρχουν στο $\tilde{\mathbb{R}}$.

Παράδειγμα:

Έστω $x_\nu = 1 + \frac{(-1)^\nu}{\nu}$

Για $\nu=1 \rightarrow x_1 = 0$
Για $\nu=2 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$
Για $\nu=3 \rightarrow x_3 = \frac{2}{3}$
Για $\nu=4 \rightarrow x_4 = \frac{5}{4}$

$S_1 = \frac{3}{2}$, $S_2 = \frac{5}{4}$, ...
(και φθίνει μέχρι να φθάσει στο 1)
$i_1 = 0$, $i_2 = \frac{2}{3}$, $i_3 = \frac{5}{5}$, ...
(και αυξάνει μέχρι να φθάσει στο 1).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\lim\inf(x_\nu) \leq \lim\sup(x_\nu)$

Αποδ.

Έστωσαν $k, \lambda \in \mathbb{N}$ και $\mu = \max\{k, \lambda\}$
Τότε, $\{x_\nu : \nu \geq \mu\} \subseteq \{x_\nu : \nu \geq k\}$ και
$\{x_\nu : \nu \geq \mu\} \subseteq \{x_\nu : \nu \geq \lambda\}$.

Συνεπώς, $\sup\{x_\nu : \nu \geq \mu\} \leq \sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$

Ωστόσο,

$\inf\{x_\nu : \nu \geq \lambda\} \leq \inf\{x_\nu : \nu \geq \mu\} \leq \sup\{x_\nu : \nu \geq \mu\} \leq \sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$

Τότε,

$\inf\{x_\nu : \nu \geq \lambda\} \leq \sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$

Ας σταθεροποιήσουμε το k

Τότε, το $\sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$ είναι α.φ. του $\inf\{x_\nu : \nu \geq \lambda\}$.

Άρα, $i_\lambda \leq \sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$

Εντούτοις, $\lim\inf(x_\nu) \leq \sup\{x_\nu : \nu \geq k\}, \forall k$

Άρα, $\lim\inf(x_\nu)$ είναι κφ του $\sup\{x_\nu : \nu \geq k\}$

Επομένως, $\lim\inf(x_\nu) \leq \lim\sup(x_\nu)$

2) $\lim\sup(-x_\nu) = -\lim\inf(x_\nu)$ και
$\lim\inf(-x_\nu) = -\lim\sup(x_\nu)$.

Αποδ.

Εφόσον ισχύει $\forall A \subseteq \mathbb{R} : -A = \{x : -x \in A\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup(-A) = -\inf(A)$

Τότε,

$$\lim\sup(-x_\nu) = \inf_k \sup_{n\geq k}(-x_\nu) =$$

$$= \inf_k \left(-\inf_{n\geq k}(x_\nu)\right) = -\sup_k \inf_{\nu \geq k}(x_\nu) =$$

$$= -\lim\inf(x_\nu)$$

Ομοίως και η άλλη σχέση

ΘΕΩΡΗΜΑ:

1) Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$: $\lim\sup(x_\nu) \leq \gamma \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k) : \forall \nu \geq k$
Έτσι ώστε $x_\nu \leq \gamma + \varepsilon$

2) Έστω $\delta \in \mathbb{R}$: $\delta \leq \lim\inf(x_\nu) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k)\ \forall \nu \geq k$ έτσι ώστε $\delta - \varepsilon \leq x_\nu$

<u>Αποδ.</u>

1) $\lim\sup(x_\nu) \leq \gamma < \gamma + \varepsilon \Rightarrow \inf_k(S_k) < \gamma + \varepsilon$
Δηλαδή, δεν υπάρχει περίπτωση κανένας όρος να είναι μεγαλύτερος από $\gamma + \varepsilon$.
Επομένως, υπάρχει k : $S_k \leq \gamma + \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{x_\nu : \nu \geq k\} \leq \gamma + \varepsilon \Rightarrow x_\nu \leq \gamma + \varepsilon$.

2) Έστω $-\delta = \gamma \Rightarrow \delta = -\gamma$
$\delta \leq \lim\inf(x_\nu) \Rightarrow -\gamma \leq \lim\inf(x_\nu) \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma \geq -\lim\inf(x_\nu) \Rightarrow \gamma \geq \lim\sup(-x_\nu)$.
Τότε από την (1) για τυχαίο $\varepsilon > 0$
$\exists k : \forall \nu \geq k \Rightarrow -x_\nu \leq \gamma + \varepsilon \Rightarrow x_\nu \geq -\gamma - \varepsilon \Rightarrow x_\nu \geq \delta - \varepsilon$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ :</u>

Αν $\lim\sup(x_\nu) = \lim\inf(x_\nu) = L \in \tilde{\mathbb{R}}$ αν.ν $\exists \lim(x_\nu)$

<u>Αποδ.</u>

α. $L \in \mathbb{R}$: $\lim\sup(x_\nu) = \lim\inf(x_\nu) = L \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\sup(x_\nu) \leq L$ και $\lim\inf(x_\nu) \geq L \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ για τυχόν $\varepsilon > 0$ $\left\{\begin{array}{l} \exists k_1 : \forall \nu \geq k_1 : x_\nu \leq L + \varepsilon \\ \exists k_2 : \forall \nu \geq k_2 : x_\nu \geq L - \varepsilon \end{array}\right| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, $\forall \nu \geq k_0 \Rightarrow L - \varepsilon \leq x_\nu \leq L + \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\varepsilon \leq x_\nu - L \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x_\nu - L| \leq \varepsilon. \Rightarrow \exists \lim x_\nu = L \in \mathbb{R}$

β. $L = +\infty$: Έστω $M > 0 \Rightarrow L > M$
Εντούτοις, $\lim\inf(x_\nu) \geq M + \varepsilon \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (\exists k)(\forall \nu \geq k)$:
$x_\nu > M + \varepsilon - \varepsilon = M \Rightarrow \exists \lim x_\nu = +\infty = L$

γ. $L = -\infty$ ομοίως με το β (παίρναμε το $\lim\sup x_\nu$)

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ:

Εστω $\mathcal{X}$ η συλλογή όλων των συνόλων
και η ακολουθία συνόλων $A_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $A_\nu \subseteq B, \forall \nu$
Τοτε ορίζουμε:

$$\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu = \sup(A_\nu) := \vee A_\nu$$

$$\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu = \inf(A_\nu) := \wedge A_\nu$$

$$\limsup(A_\nu) := \inf_k \sup_{\nu \geq k}(A_\nu) := \bigwedge_k \bigvee_{\nu \geq k} A_\nu$$

$$\liminf(A_\nu) := \sup_k \inf_{\nu \geq k}(A_\nu) := \bigvee_k \bigwedge_{\nu \geq k} A_\nu$$

Υπακολουθίες / κατώτερο-ανώτερο όριο:

① $x_{k_\nu} \to \limsup(x_\nu) := \max\{\ell : \exists x_{\mu_\nu} : x_{\mu_\nu} \to \ell\}$

② $x_{\lambda_\nu} \to \liminf(x_\nu) := \min\{\ell : \exists x_{\mu_\nu} : x_{\mu_\nu} \to \ell\}$.

Παράδειγμα 1:

$$x_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & \nu = 3k = 3\mathbb{N} \\ 1 + \frac{1}{\nu}, & \nu = 3k+1 = 3\mathbb{N}+1 \\ \nu^2, & \nu = 3k+2 = 3\mathbb{N}+2 \end{cases}$$

$x_{k_\nu} \to x$, $k_\nu : \mathbb{N} \to K \Rightarrow x_\lambda, \lambda \in K \subseteq \mathbb{N} = (3\mathbb{N}) \cup (3\mathbb{N}+1) \cup (3\mathbb{N}+2)$

$3\mathbb{N}$: $x_\nu \to 0 = \liminf(x_\nu)$

$3\mathbb{N}+1$: $x_\nu \to 1$

$3\mathbb{N}+2$: $x_\nu \to +\infty = \limsup(x_\nu)$

Παράδειγμα 2:

$[-1,1] = \{ \eta\mu\, \nu : \nu = 1, 2, \ldots \}'$

Τότε, $\limsup [-1,1] = 1$ και $\liminf [-1,1] = -1$